**План**

1. Фундаментальные ЧП
2. Теорема Больцано-Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной ЧП
3. Теорема о необходимых и достаточных условиях сходимости ЧП
4. Утверждение об ограниченности фундаментальной ЧП
5. Теорема Коши о сходимости фундаментальной ЧП

**Теорема 1.17** (Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной ЧП можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Так как ЧП ограничена, то она имеет хотя бы одну предельную точку. В таком случае согласно лемме 1.2 из этой ЧП можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к указанному пределу. Теорема доказана.

Замечание 1. Из любой ограниченной ЧП можно выделить монотонную подпоследовательность. В самом деле, в силу теоремы 1.17 из любой ограниченной ЧП можно выделить сходящуюся подпоследовательность, из которой в силу замечания, сделанного в начале раздела 1.4, можно выделить монотонную подпоследовательность.

Замечание 2. Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная ЧП, элементы которой находятся на сегменте $[a,b]$. Тогда предел $c$ любой сходящейся подпоследовательности $\{x_{k_n}\}$ также находится на сегменте $[a,b]$. Действительно, так как $a \le x_{k_n} \le b$, то в силу следствия 2 из теоремы 1.13 выполняются неравенства $a \le c \le b$. Это и означает, что $c \in [a,b]$.

При выяснении вопроса о сходимости ЧП приходится оценивать разность элементов $x_n$ и её предполагаемого предела $a$, то есть приходится предугадывать, чему равен предел $a$. Естественно указать «внутренний» критерий сходимости ЧП, основанный лишь на величине её элементов. Для этого введём понятие фундаментальной последовательности:

ЧП $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n \ge N(\varepsilon)$ и для всех натуральных чисел $p$ $(p = 1,2,\dots)$ справедливо неравенство $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$.

**Теорема 1.18**. Для того чтобы ЧП $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной и чтобы её верхний и нижний пределы совпадали.

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть ЧП $\{x_n\}$ сходится. Тогда она согласно теореме 1.8 ограничена и в силу леммы 1.3 имеет единственную предельную точку. Таким образом, $\underline{x} = \overline{x}$.

2) Достаточность. Следствие 2 из теоремы 1.16 утверждает, что для любого $\varepsilon > 0$ интервал $\left(\underline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon\right)$ содержит все элементы ЧП $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера. Так как $\underline{x} = \overline{x} = x$, то указанный интервал совпадает с $\varepsilon$-окрестностью точки $x$, то есть число $x$ является пределом ЧП $\{x_n\}$. Теорема доказана.

Установим теперь важное свойство фундаментальных ЧП, которое по существу является их эквивалентным определением:

Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой элемент $x_N$ фундаментальной ЧП, в $\varepsilon$-окрестности которого находятся все элементы ЧП, начиная с номера $N$. Иными словами, вне интервала $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$ находится не более чем конечное число элементов ЧП. В самом деле, из определения фундаментальной ЧП следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $p$ выполняется неравенство $\left|x_{N+p} - x_N\right| < \varepsilon$, которое и означает, что в $\varepsilon$-окрестности элемента $x_N$ находятся все элементы ЧП, начиная с номера $N$.

Отмеченное свойство позволяет установить ограниченность фундаментальной ЧП. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ и $x_N$ – элемент, в $\varepsilon$-окрестности которого находятся все элементы ЧП, начиная с номера $N$. Тогда вне этой $\varepsilon$-окрестности могут находиться только элементы $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$. Положим $A = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|, |x_N - \varepsilon|, |x_N + \varepsilon|\}$. Тогда на сегменте $[-A, A]$ находятся все элементы фундаментальной ЧП, что и означает её ограниченность.

**Теорема 1.19 (критерий Коши-Буняковского)**. Для того чтобы ЧП $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть ЧП $\{x_n\}$ сходится и $x$ – её предел. Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Из определения сходящейся ЧП вытекает, что для числа $\varepsilon/2$ найдётся номер $N$ такой, что при $n \geq N$ будет выполняться неравенство $|x_n - x| < \varepsilon/2$. Если $p$ – любое натуральное число, то при $n \geq N$ выполняется также неравенство $\left|x_{n+p} - x<\varepsilon 2\right.$. Так как модуль суммы двух величин не больше суммы их модулей, то из последних двух неравенств получим, что при $n \geq N$ и для всех натуральных чисел $p$:

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|\left(x_{n+p} - x\right) + (x - x_n)\right| \leq \left|x_{n+p} - x\right| + |x_n - x| < \varepsilon.$$

Тем самым фундаментальность ЧП $\{x_n\}$ доказана.

2) Достаточность. Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная ЧП. Согласно теореме 1.18 для доказательства сходимости данной ЧП достаточно доказать её ограниченность и равенство $\underline{x} = \overline{x}$ её нижнего и верхнего пределов. Ограниченность фундаментальной ЧП установлена выше.

Для доказательства $\underline{x} = \overline{x}$ воспользуемся свойством фундаментальной ЧП, согласно которому для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_N$ такой, что вне интервала $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$ находится не более чем конечное число элементов фундаментальной ЧП. На основании следствия 1 из теоремы 1.16 интервал $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$ содержит интервал $\left(\underline{x}, \overline{x}\right)$, и поэтому $\overline{x} - \underline{x} \leq 2\varepsilon$, откуда, в силу произвольности $\varepsilon$, $\underline{x} = \overline{x}$. Теорема доказана.

Пример. Применим критерий Коши для установления сходимости ЧП $\{x_n\}$ с элементами:

$$x_n = a_1 + a_2 + \ \dots + a_n,$$

где $a_k$ $(k = 1,2, \dots)$ – произвольные вещественные числа, удовлетворяющие условию $|a_k| \leq q^k$, а $q$ – число из интервала $0 < q < 1$.

Пусть $n$ – любой номер, $p$ – любой натуральное число. Тогда

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ \dots + a_{n+p}\right| \leq$$

$$\leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + \left|a_{n+p}\right| \leq q^{n+1} + q^{n+2} + \ \dots + q^{n+p} =$$

$$= \frac{q^{n+1} - q^{n+1+p}}{1-q} < \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Так как $\{q^n\}$ является БМЧП, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого выполняется неравенство:

$$q^{n+1} < \varepsilon(1-q).$$

Стало быть, при $n \geq N(\varepsilon)$ и для любого натурального числа $p$ будет справедливо неравенство:

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| < \frac{q^{n+1}}{1-q} < \varepsilon,$$

то есть ЧП $\{x_n\}$ является фундаментальной ЧП и сходится согласно теореме 1.19.

**Основная литература:**

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. Часть I. Учеб.: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 648 с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. Часть II. Учеб.: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 448 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Уч. пособие. – СПб., Изд-во «Профессия», 2005. – 432 с.

**Дополнительная литература:**

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1,2,3. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 592 с.